Le autorità hanno deciso di rinnovare la pavimentazione del grande boulevard che conduce alla futura sede dell'Ente, arricchendola con un particolare motivo ornamentale, così composto: prima un quadrato di 1 cm di lato, poi proseguendo uno di 2 cm di lato, quindi uno di 3 cm di lato, e così via fino all'ultimo quadrato, il cui lato sarà di ben 10 metri. I quadrati dovranno essere tutti di colori diversi, e ciascuno dovrà essere composto a mosaico, usando tesserine quadrate dello stesso colore di 1 cm di lato. Purtroppo le tesserine dei vari colori, molto preziose, vengono vendute in confezioni da 9, per cui, anche gestendo bene gli acquisti, alla fine parecchie tesserine avanzeranno.
Determinare il minimo numero di tesserine che resteranno inutilizzate.

Soluzione La risposta è 3338.
I quadrati da comporre a mosaico sono 1000. Indichiamoli con $Q_1, \ldots, Q_{1000}$, dove il generico quadrato Q_n ha il lato di n cm ed è quindi composto da n^2 tesserine.
Sia R_n il numero di tesserine che avanzano per un quadrato di lato n. Calcoliamo i primi valori di R_n:

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	$R_{14}\ldots$
8	5	0	2	2	0	5	8	0	8	5	0	2	2 ...

Si intuisce che i valori di R_n si ripetono periodicamente con periodo di lunghezza 9 ($R_{10} = R_1$, $R_{11} = R_2$, $R_{13} = R_3 \ldots$). Se ciò è vero, allora è sufficiente:

1. calcolare quante sono le tesserine che avanzano per pavimentare i primi 9 quadrati $Q_1, Q_2, \ldots, Q_9$;
2. vedere quante volte la sequenza di resti $(8, 5, 0, 2, 2, 0, 5, 8, 0)$ si ripete nei 1000 quadrati;
3. Calcolare i resti R_n relativi ai quadrati che sono eventualmente avanzati dal precedente conteggio.

La risposta al punto 1 è chiaramente $8 + 5 + 0 + 2 + 2 + 0 + 5 + 8 + 0 = 30$; per risolvere i punti 2 e 3 si osservi che 1000 : 9 risulta 111 con resto 1, abbiamo quindi che la sequenza di 9 numeri del punto 2 si ripete 111 volte e rimane ancora escluso il quadrato Q_{1000}. In definitiva il numero cercato è $3330 + R_{1000} = 3338$.

Per completare la soluzione, resta da spiegare perchè i valori di R_n si ripetono periodicamente. Il motivo è il seguente: consideriamo ad esempio R_1 (che vale vale 8). Vediamo che allora anche R_{10}, R_{19}, R_{28}, e, in generale, R_{1+9k}, devono valere 8, infatti se $n = (1 + 9k)$ allora $n^2 = 1 + 18k + 81k^2 = 1 + 9(2k + 9k^2)$ e quindi per pavimentare Q_n in questi casi si usano completamente $(2k + 9k^2)$ confezioni di tesserine più una sola tesserina di un'ulteriore confezione (che pertanto lascia 8 tesserine inutilizzate). Lo stesso tipo di ragionamento può essere ripetuto per $R_2, \ldots, R_9$.