Ora che le gare a squadre sono gestite da un ricco Ente, finalmente tutti i collaboratori riceveranno lauti compensi. L'ammontare in euro dei vari compensi saranno tutti numeri mediani di 4 cifre. In base alla definizione data dal Grande Capo, un numero di 4 cifre si dice mediano se le sue cifre non sono in progressione aritmetica, ma il numero costituito dalle sue 2 cifre centrali è la media artmetica di quello costituito dalle due cifre iniziali e di quello costituito dalle 2 cifre finali. Così, per esempio, 3581 è un numero mediano (infatti $(35+81)/2 = 58$), mentre 3333, 3579 o 6420 non lo sono, in quanto le loro cifre sono in progressione aritmetica. Il compenso più alto spetta ovviamente al

Grande Capo; un po' meno prendono i tecnici delle radio-boe (tutti compensati con la stessa cifra); meno ancora i 2 impiegati che devono timbrare le buste (anche loro pagati ugualmente); e ancora meno il cuoco della mensa, accusato di metterci troppo tempo per cuocere un semplice uovo.

Determinare a quanto ammonterà, al massimo, il compenso del cuoco.

Soluzione La risposta è 8517.
Ricordiamo innanzitutto che una sequenza di numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si dice in progressione artimetica se esiste un numero b (detto ragione) tale che $a_{i+1} = a_i + b$ per ogni $i = 2, \ldots, n-1$.

Il problema richiede di trovare il quarto numero "mediano" (in ordine decrescente). Sia $abcd$ uno dei numeri di quattro cifre che cerchiamo (a quindi è la cifra delle migliaia, b delle centinaia, ecc.).
Se eseguiamo la somma:

$$\begin{array}{ccc} a & b & + \\ c & d & \end{array}$$

otteniamo che la parte delle decine (ed eventualmente delle centinaia) di tale somma è data da $a+c$ (se $b+d \leq 9$) o da $a+c+1$ (se $b+d > 9$ e quindi dà il riporto di 1). Quindi $a+c$ o $a+c+1$ deve uguagliare la parte delle decine (ed eventualmente delle centanaia) del numero che si ottiene moltiplicando il numero $b\,c$ per due. Tale parte delle decine (ed eventualmente delle centinaia) è data da $2 \times b$ (se $c \leq 4$) o da $2 \times b + 1$ (se $c \geq 5$). Abbiamo così la condizione:

$$\left.\begin{array}{l} a+c \\ \text{oppure} \\ a+c+1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 2b & (\text{se } c \leq 4) \\ \text{oppure} & \\ 2b+1 & (\text{se } c \geq 5) \end{array}\right.$$

Pertanto, dati a e b, i possibili valori di c che si ottengono dalle equazioni di sopra sono: $2b-a-1$ o $2b-a$ (e in questi casi deve essere $c \leq 4$) oppure $2b-a$ o $2b-a+1$ (se $c \geq 5$). Riassumendo, i possibili valori per c sono: $2b-a$, $2b-a-1$ (se tale numero è minore o uguale a 4) e $2b-a+1$ (se tale numero è maggiore o uguale a 5).
Ad esempio, se scegliamo $a = 7, b = 5$ abbiamo che i possibili valori per c sono

$2 \times 5 - 7 = 3$ e $2 \times 5 - 7 - 1 = 2$, se scegliamo $a = 7, b = 6$, c può valere 5, 4, 6. Se i valori di a, b, c sono noti, d si calcola facilmente dall'equazione $(10a + b) + (10c + d) = 2(10b + c)$ (che è la condizione data in ipotesi per costruire un numero "mediano"), cioè $d = 19b - 10a - 8c$.
Cerchiamo ora i numeri "mediani" a partire dal più grande. La scelta massima per a è 9, così come la scelta massima per b. Allora i possibili valori per c, in base alle considerazioni di sopra, sono: 9 e 10 (ovviamente 10 va scartato, in quanto la cifra c deve essere tra 0 e 9). Il valore corrispondente di d è allora $19 \times 9 - 10 \times 9 - 8 \times 9 = 9$. Il possibile numero "mediano" è dunque 9999. Questo numero va scartato in quanto le sue cifre sono in progressione aritmetica (di ragione 0). Scegliamo allora $a = 9$, $b = 8$, otteniamo che c può valere 7 o 8. Se $c = 7$ otteniamo $d = 6$, se $c = 8$ otteniamo $d = -2$ che non può essere accettato. Si trova quindi un solo candidato che è 9876 (anche questo non è un numero "mediano", in quanto le sue cifre sono in progressione aritmetica (di ragione -1). Proseguendo in questo modo si trovano i seguenti numeri:

9999	*
9876	*
9753	*
9628	
9630	*
9505	
8888	*
8890	
8765	*
8642	*
8517	
...	

Quelli contrassegnati con "*" hanno le cifre in progressione aritmetica, gli altri sono numeri "mediani". Pertanto il Grande Capo potrà essere pagato al massimo 9628 euro, i tecnici delle radio-boe potranno essere pagati 9505 euro, gli impiegati 8890 euro e il cuoco 8517 euro. La risposta è quindi 8517.