Prova di allenamento
per la gara di matematica a squadre

Trieste 8 marzo 2006

Istruzioni Generali

i) Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.

ii) Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.

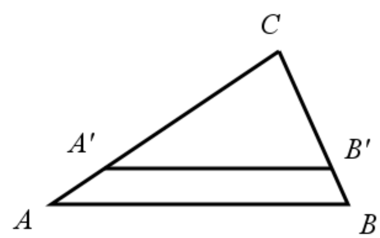
iii) Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.

iv) Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.

v) Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2360 \qquad \pi = 3.1416.$$

1) Sapendo che $A'B'$ è parallelo ad AB, che $AA' = (1/5)AC$ e che l'area del quadrilatero $ABB'A'$ è $45cm^2$, determinare l'area del triangolo ABC in cm^2.



Punti 10

2) Quale cifra occupa la 70^a posizione dopo la virgola nell'espressione decimale di 1/70?

Punti 10

3) Un giornalista deve fare un articolo su una classica isola di furfanti e cavalieri, in cui tutti gli abitanti o mentono sempre (e sono furfanti) o dicono sempre la verità (e sono cavalieri) e tutti si conoscono reciprocamente.

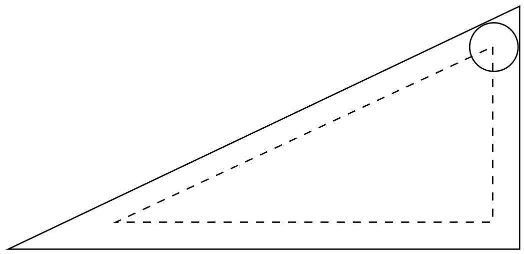
Supponiamo che il giornalista intervisti una e una sola volta tutti i 2006 abitanti dell'isola e ottenga, nell'ordine, le seguenti risposte:

A1 "sull'isola c'è almeno un furfante"
A2 "sull'isola ci sono almeno 2 furfanti"
A3 "sull'isola ci sono almeno 3 furfanti"
.
.
.
A2005 "sull'isola ci sono almeno 2005 furfanti"
A2006 "sull'isola ci sono 2006 furfanti"

Aiutate il giornalista a stabilire quanti furfanti ci sono sull'isola.

Punti 20

4) Consideriamo un triangolo rettangolo avente i lati di lunghezza 30, 72 e 78. Un cerchio di raggio 6 si muove all'interno del triangolo in modo da toccare sempre almeno uno dei suoi lati.



Quanto è lungo il percorso descritto dal centro del cerchio dopo essere tornato alla posizione di partenza?

Punti 30

5) In un torneo di tennis, 8 persone decidono di giocare degli incontri di doppio (cioè due contro due) in tutti i modi possibili. Quanti incontri ci sono nell'intero torneo?

Punti 20

6) Sapendo che $x, y > 0$, $xy + x + y = 13$ e $x^2y + xy^2 = 40$, dire quanto vale $x^2 + y^2$.

Punti 30

7) Quante sono le soluzioni dell'equazione $4x + 5y + 20z = 1000$ con x, y, z interi non negativi?

Punti 30

8) Facendo ruotare un triangolo rettangolo intorno ad uno dei suoi cateti, il volume del cono generato dalla rotazione è $800\pi cm^3$. Facendo ruotare lo stesso triangolo intorno all'altro cateto, il volume del cono ottenuto è $1920\pi cm^3$. Calcolare la misura dell'ipotenusa esprimendo il risultato in cm.

Punti 10

9) Se a e b sono numeri positivi tali che $a^b = b^a$ e $b = 9a$, stabilire le prime quattro cifre decimali (dopo la virgola) di a^2.

Punti 20

10) Sapendo che 2^{100} ha 31 cifre (in base 10), quante cifre ha 5^{100}?

Punti 20

11) In una partita di tennis i due giocatori, che sono della stesso valore, mettono in campo il 75% delle prime palle di servizo. Se la prima palla di

servizio è buona, il giocatore che serve ha probabilità di vincere lo scambio pari al 60%. Questa cala al 40% se è costretto a usare la seconda palla. Quale è la probabilità che un giocatore che sta servendo conquisti il punto? Esprimere il risultato come percentuale.

Punti 10

12) In una classe ci sono 3 ragazzi per ogni 2 ragazze. Se l'età media dei ragazzi è 15 anni e 5 mesi e quella delle ragazze è 14 anni e 7 mesi, determinate l'età media, in mesi, dell'intera classe.

Punti 20