Prova di allenamento
per la gara di matematica a squadre

Trieste 15 febbraio 2006

Istruzioni Generali

i) Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.

ii) Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.

iii) Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.

iv) Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.

v) Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2360 \qquad \pi = 3.1416.$$

1) Quante sono le terne ordinate (a, b, c) di numeri interi positivi, distinti da 1, tali che

$$abc = 7^{39} \ ?$$

2) Quanti sono i numeri interi positivi n tali che $3^n + 5^n$ è multiplo di $3^{n-1} + 5^{n-1}$?

3) Le magliette dei giocatori di una squadra di calcio sono numerate da 1 a 11. Qual è la probabilità che scegliendo a caso 6 giocatori la somma dei numeri delle loro magliette sia dispari? (Si esprima il risultato come somma di numeratore e denominatore di una frazione ridotta ai minimi termini).

4) Nel triangolo acutangolo ABC siano AH, AD e AM rispettivamente l'altezza, la bisettrice e la mediana per il vertice A (e quindi H, D e M sono punti di BC). Se le lunghezze di AB, AC e DM sono rispettivamente 11 m., 8 m. e 1 m. si calcoli la lunghezza in centimetri del segmento DH.

5) Si consideri la succesione di numeri naturali definita da $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determinare le ultime due cifre di a_{2000}.

6) Ci sono mille lampioni numerati da 1 a 1000, spenti ed ognuno con il proprio interruttore. Mille concorrenti numerati da 1 a 1000 passano e premono gli interruttori dei lampioni con numero multiplo del proprio pettorale. Alla fine quanti lampioni restano accesi?

   Gli interruttori funzionano così: alla prima pressione accendono, alla seconda spengono, alla terza accendono, e così via.

7) Il guardiano di un faro ha ricevuto comunicazione di un'interruzione dell'energia elettrica, e deve fare funzionare il faro con un generatore a gasolio. Il generatore consuma 6 litri all'ora, più mezzo litro ogni volta che viene messo in marcia (inizialmente il generatore è fermo). Nelle 10 ore esatte di funzionamento notturno il faro non può smettere di funzionare per più di 10 minuti consecutivi, e quando funziona deve farlo per almeno 15 minuti consecutivi. Qual è la quantità minima di gasolio necessaria a far funzionare il faro osservando tutte le regole? Esprimere il risultato in dl.

8) Due automobili, girando a velocità costante su una pista nello stesso verso, si trovano affiancate ogni 56 minuti. Se, mantenendo la stessa velocità, una delle due andasse nel verso opposto, le due automobili si incontrerebbero ogni 8 minuti. Quanti minuti impiega l'automobile più veloce per percorrere l'intero circuito?

9) Se a, b sono numeri reali positivi tali che $a + b = 1$, qual è il minimo valore possibile per il prodotto $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)$?

10) I numeri a, b sono interi positivi. Qual è il minimo valore positivo di $a + b$ affinchè $21ab^2$ e $15ab$ siano entrambi quadrati perfetti?

11) Se x è un numero reale positivo si denoti con $[x]$ la parte intera di x, cioè il massimo intero positivo n tale che $n \leq x$. Si calcoli la somma

$$\sum_{n=1}^{10000} [\sqrt{n}] = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + ... + [\sqrt{9999}] + [\sqrt{10000}]$$

Si scriva come risultato la somma delle cifre del numero così determinato. Lo studente può utilizzare, se crede, la seguente formula

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$