

January 18, 2011

Abstract

1 Algebra

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 2010. Qual é il massimo grado che può avere il polinomio

$$p(x-1) - 3p(x) + 3p(x+1) - p(x+2)?$$

2. Sia $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sapendo che la somma di due delle radici del polinomio vale zero, quale fra le seguenti relazioni tra i coefficienti di $P(x)$ é sempre vera?

(A) $abc = 0$

(B) $c = ab$

(C) $c = a + b$

(D) $b^2 = ac$

(E) nessuna delle risposte precedenti é corretta.

3. * Sia $p(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \dots + a_1x + a_0$ un polinomio, con gli a_i interi. Sappiamo che, per tutti gli interi k compresi tra 1 e 20, $p(k) = 2k$. Quali sono le ultime 3 cifre di $p(21)$?
4. Indicando con x_1, x_2, x_3 e x_4 le soluzioni dellequazione $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$, quanto vale

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$$

5. Dati i due insiemi $A = 2, 5, 3$ e $B = 1, 2, 3$, trovare massimo e minimo della formula

$$\sum_{i=1}^3 (a_i b_i)$$

dove $a_i \in A$ e b_i é un elemnto di B a lui “accoppiato”, in modo che si formino così tre coppie distinte. Trovare inoltre la media aritmetica, geometrica ed armonica dellinsieme dato e verificarne le disugualianze.

6. Sia $x > 1$ un numero reale. Dimostrare che

$$\sqrt{x - \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x + \sqrt{2x-1}}$$

non dipende da x , e determinarne il valore.

7. Siano $a_0, a_1, a_2, \dots$ numeri interi tali che $a_0 = 19, a_1 = 25$, e per ogni $n \geq 0$ valga $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Qual é il più piccolo $i > 0$ per cui a_i é multiplo di 19?

- (A) 19
- (B) 25
- (C) 38
- (D) 44
- (E) 50

8. Calcolare le due espressioni

$$a) \sum_{k=1}^{2011} \frac{1}{k^2} = k \qquad b) * \sum_{k=1}^{2011} \frac{2k+3}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

9. * Siano a, b, c, d interi distinti e sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che

$$p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 1 \quad (1)$$

- Dimostrare che non esiste nessun numero intero n per cui $p(n) = 12$
- Esiste un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi con la proprietà (1) tale che $P(n) = 1998$ per qualche intero n ?

10. Dimostrare le disuguaglianze

$$(A) \quad ab \leq a^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$(B) \quad ab^2 \leq \frac{a^3}{3} + \frac{2b^3}{3}$$

$$(C) \quad ab^2 \leq \frac{64a^3}{3} + \frac{b^3}{12}$$

11. * Dimostrare che $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ per ogni $a, b, c > 0$

12. * Sia x la più piccola delle due soluzioni di $x^2 - 4x + 2 = 0$, si determini quanto le prime tre cifre dopo la virgola del numero (scritto in base 10)

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2009}$$

13. * Siano $a \geq b \geq c > 0$ tre numeri reali. Dimostrare che

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 3/2$$