

## Abstract

# 1 Combinatoria

1. Qual è la seconda cifra (partendo da sinistra) del numero

$$(10^{16} + 1)(10^8 + 1)(10^4 + 1)(10^2 + 1)(10 + 1)?$$

- (A) 0  
(B) 1  
(C) 2  
(D) 3  
(E) 4
2. Nella classe di Sergio, dopo la correzione dell'ultimo compito di matematica, al quale tutti gli alunni erano stati presenti, la media aritmetica delle insufficienze è risultata 4,6, mentre la media aritmetica delle sufficienze è risultata 7,1. Sapendo che il professore ha dato soltanto voti interi, quanti alunni ci sono al minimo nella classe di Sergio?
- (A) 10  
(B) 12  
(C) 15  
(D) 24  
(E) 30
3. In una scatola ci sono venti palline numerate da 1 a 20. Ciascun numero è presente in una e una sola di queste palline. Quante palline diverse dobbiamo estrarre come minimo, per essere sicuri che il prodotto dei loro numeri sia un multiplo di 12?
- (A) 7  
(B) 11  
(C) 12  
(D) 15  
(E) 18
4. Lorenza si trova su una pista avente la forma di un poligono regolare con 2007 lati, i cui vertici sono numerati da 1 a 2007 in senso antiorario. Lorenza, partendo dal vertice 6, salta ogni volta 4 vertici e cade sul quinto più avanti (ad esempio, dal 20 salta al 25), ma salta indietro di 2 vertici quando cade su un vertice identificato da una potenza di 2 (ad esempio, dopo un eventuale salto dal 27 al 32, deve saltare indietro al 30). Dopo quanti salti Lorenza avrà oltrepassato per la prima volta il vertice 1?
5. Una pulce si muove saltando avanti e indietro lungo una retta. La tana della pulce è un punto della retta. Le regole di salto sono le seguenti:
- se la pulce si trova ad una distanza minore o uguale a un metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza doppia della precedente allontanandosi ancora di più dalla tana.
  - se la pulce si trova ad una distanza  $d$  maggiore di un metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza  $\frac{1}{d}$  dalla tana ma dalla parte opposta rispetto a quella dove si

- trova attualmente. Se dopo 5 salti la pulce si trova a 80 cm dalla tana in una certa direzione, con quante sequenze distinte di salti può aver raggiunto quella posizione?
6. 20 ragazzi si incontrano ad un convegno e alcuni di essi che non si conoscono si presentano stringendosi la mano.
    - (A) Mostrare che due di essi hanno stretto lo stesso numero di mani.
    - (B) Dopo il convegno ognuno di essi manderà una mail ad esattamente 10 altri partecipanti. Dimostrare che ci sono due ragazzi che si sono mandati una mail reciprocamente.
  7. Una regione contiene diciassette città; ognuna di esse é collegata ad esattamente altre 8 con un volo diretto (andata e ritorno). Dimostrare che da ogni città se ne può raggiungere qualsiasi altra.
  8. Sia dato un rettangolo  $m \times n$  quadratini unitari. Quanti quadratini sono attraversati da una diagonale del rettangolo?
  9. In quante regioni viene diviso un piano da 2010 rette, tali che non ne esistono 2 parallele e non ne esistono 3 che passano per uno stesso punto?
  10. Si vogliono riempire le nove caselle di una tabella  $3 \times 3$  con interi non negativi, in maniera tale da rispettare le seguenti condizioni:
    - in almeno una delle caselle viene inserito il numero 3;
    - la somma dei numeri in ciascuna riga è 3;
    - la somma dei numeri in ciascuna colonna è 3.
 In quanti modi differenti possiamo riempire la tabella?
    - (A) 18
    - (B) 24
    - (C) 27
    - (D) 30
    - (E) 36
  11. 6 punti nel piano sono collegati a 2 a 2 con un segmento o di colore blu o di colore rosso. Dimostrare che in ogni caso si forma un triangolo con tutti i lati dello stesso colore.
  12. \* 17 punti nel piano sono collegati a 2 a 2 con un segmento o di colore blu, rosso o verde. Dimostrare che in ogni caso si forma un triangolo con tutti i lati dello stesso colore.
  13. Sulla lavagna sono scritti i numeri positivi  $1, 2, \dots, 4n - 1$ . Ad ogni mossa si possono sostituire due di essi con il modulo della loro differenza (ad esempio, si può sostituire 3 e 5 con 2). Dimostrare che dopo  $4n - 2$  mosse rimarrà sulla lavagna un numero pari.
  14. Una scacchiera  $4 \times 4$  contiene la cifra 1 in tutte le caselle, ad eccezione di una delle due centrali dell'ultima riga, in cui si trova  $-1$ . Ogni mossa consente di cambiare tutti i segni di una riga, una colonna o una diagonale. Dimostrare che, indipendentemente dal numero e dal tipo di mosse effettuate, rimarrà almeno un  $-1$  nella tabella.