

Abstract

1 Combinatoria 2

1. Ad una gara a punti su pista partecipano nove concorrenti. Ad ogni traguardo intermedio vengono assegnati 9 punti al primo, 8 al secondo, 7 al terzo e così via fino ad assegnare un punto all'ultimo. Prima dell'ultimo sprint (in cui il punteggio assegnato vale il doppio) la classifica vede al comando Alberto con 2 punti di vantaggio su Boris e 9 su Claudio. Gli altri concorrenti hanno un distacco in punti tale da non consentire più loro di aggiudicarsi la gara. Quanti sono i possibili differenti piazzamenti dei tre corridori nell'ultimo sprint che permettono a Claudio di vincere la gara?
2. Ogni partito ha fatto le sue promesse; due partiti qualunque hanno almeno una promessa in comune, due partiti diversi non hanno fatto esattamente le stesse promesse. Sapendo che le promesse totali sono al più 5, qual è il numero massimo di partiti presenti?
3. In un torneo di pallacanestro ogni squadra affronta esattamente due volte tutti gli altri partecipanti. Il torneo viene vinto da una squadra sola in testa alla classifica con 26 punti, mentre esattamente 2 squadre arrivano ultime con 20 punti. Quante squadre hanno partecipato al torneo? (Ricordiamo che nella pallacanestro si assegnano 2 punti alla vittoria e nessuno alla sconfitta, mentre non è possibile pareggiare)
4. Una regione contiene diciassette città; ognuna di esse è collegata ad esattamente altre 8 con un volo diretto (andata e ritorno). Dimostrare che da ogni città se ne può raggiungere qualsiasi altra.
5. Sia dato un rettangolo $m \times n$ quadratini unitari. Quanti quadratini sono attraversati da una diagonale del rettangolo?
6. Siano dati 8 punti distinti nel piano. Vengano costruiti tutti i possibili segmenti con estremi in tali punti. Si sa che gli assi di almeno 22 di questi segmenti si intersecano in uno stesso punto. Si dimostri che tutti gli assi dei segmenti costruiti si intersecano nel medesimo punto.
7. Una pedina deve muoversi su una scacchiera 10×7 dalla casella A (in alto a sinistra) alla casella B (in basso a destra) spostandosi solo in orizzontale o verticale di una casella alla volta. Quanti sono i percorsi minimi da A a B? Fra questi, quanti tali che la pedina non si muove verso il basso in due mosse consecutive?
8. Sia $A = 1, 2, \dots, n$. Quante sono le coppie $\langle B, C \rangle$ di sottoinsiemi disgiunti di A? (si considerino coppie NON ordinate) [suggerimento: considerare le coppie per numero totale k di elementi. Quindi $k = |B \cup C| = |B| + |C|$. Per ogni k ci sono $C_{n,k}$ possibili scelte fra gli elementi di A . . .]
9. * Ciascuna casella di un quadrato 25×25 contiene 1 o -1. Sia a_i il prodotto dei numeri sulla i -esima riga e b_j il prodotto di quelli sulla j -esima colonna. Dimostrare che:
$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_{25} + b_{25} \neq 0$$
10. Tutti i punti del piano sono colorati o di bianco o di nero. Dimostrare che esiste un triangolo equilatero che ha tutti i vertici dello stesso colore.

11. Un pavimento rettangolare é stato coperto con piastrelle quadrate 2×2 e piastrelle rettangolari 1×4 in modo da non lasciare buchi e senza sovrapposizioni tra piastrelle. Ad un certo punto una delle piastrelle si rompe. Dimostrare che non é possibile sostituirla con una dell'altro tipo, neanche riorganizzando a piacere la pavimentazione.
12. Trovare tutti i valori naturali di n ed m tali che é possibile piastrellare una stanza quadrata di dimensioni $n \times m$ senza lasciare buchi e senza sovrapposizioni di:
 - (A) piastrelle composte da 4 quadratini a forma di L.
 - (B) piastrelle composte da 3 quadratini sempre a forma di L.
 - (C) piastrelle composte da 5 quadratini di cui 4 formano un quadrato e l'altro posizionato sopra a sinistra (o a destra).
 - (D) ** Dimostrare che non é possibile piastrellare una stanza 5×7 con piastrelle della forma (B) in cui sono però ammesse anche sovrapposizioni tra piastrelle, ma sempre in modo che su ogni quadratino risulti lo stesso numero di strati.