

13 gennaio 2011

Sommario

Giacché mancano i disegni, durante la consultazione si consiglia di farne precisi, magari più di uno.

1

1. Sia ABC un triangolo, dimostrare che le tre mediane si incontrano in un unico punto.

Dimostrazione. Sia M il punto medio di AB , N il punto medio di AC e Q il punto medio di BC . Le due mediane CM e BN si incontrano nel punto G . Vogliamo far vedere che i punti A , G e Q sono allineati.

I triangoli BMC e NBC hanno stessa area, dal momento che entrambi hanno area la metà dell'area di ABC . Quindi sottraendo ad entrambi l'area di BCG si ricava che anche i triangoli BGM e NGC hanno stessa area; indichiamo tale area con $\mathcal{A}$. Anche i triangoli BQG e CQG hanno stessa area, dal momento che hanno base uguale ($BQ = QC$) e la stessa altezza (quella condotta da G); indichiamo tale area con $\mathcal{B}$. Per lo stesso argomento (basi uguali e stessa altezza) ricaviamo che il triangolo AGM ha stessa area del triangolo BMG , cioè $\mathcal{A}$. Similmente anche AGN ha area $\mathcal{A}$.

Detto ciò, supponiamo per assurdo che i punti AGQ non siano allineati, e supponiamo allora che il punto G si trovi, rispetto alla retta AQ , dalla stessa parte di C (se si suppone il contrario si fa un ragionamento simile). Allora stimiamo l'area $\mathcal{S}_{AGQ}$ del triangolo AGQ . Essendo esso interno al triangolo AQC vale l'identità

$$\mathcal{S}_{AGQ} = \mathcal{S}_{AQC} - (\mathcal{S}_{AGN} + \mathcal{S}_{NGC} + \mathcal{S}_{QGC}) = \mathcal{S}_{AQC} - 2\mathcal{A} - \mathcal{B} \quad (1)$$

Allo stesso tempo si calcola

$$\mathcal{S}_{AQB} = \mathcal{S}_{AGM} + \mathcal{S}_{MGB} + \mathcal{S}_{BGQ} - \mathcal{S}_{AGQ} = 2\mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{S}_{AGQ} \quad (2)$$

Ora grazie a $\mathcal{S}_{AQB} = \mathcal{S}_{AQC}$ (AQ è mediana) possiamo sostituire la (2) nella parte destra della (1) e ottenere

$$\mathcal{S}_{AGQ} = -\mathcal{S}_{AGQ} \quad (3)$$

Ovvero il triangolo AGQ ha area nulla, cioè è degenere e i punti A , G e Q devono essere allineati.

□

2. Sia ABC un triangolo di circocentro O e siano M ed N i punti medi di AB e BC rispettivamente. Supponiamo di conoscere a e B le lunghezze di OM e ON rispettivamente, e supponiamo che $OM^2 + ON^2 = (\frac{AC}{2})^2$. Calcolare il raggio della circonferenza inscritta in ABC .

Dimostrazione. Il segmento MN misura la metà di AC , infatti i triangoli BMN e ABC sono simili (hanno un angolo uguale e i lati adiacenti rispettivamente in proporzione) e il rapporto di similitudine (tra i lati) è $1/2$. Perciò la condizione sulle lunghezze dei segmenti diventa $OM^2 + ON^2 = MN^2$ che vale se e solo se il triangolo MNO è rettangolo in O . Anche gli angoli BMO e ONB sono retti (O è il circocentro e le rette OM e ON sono gli assi di AB e BC rispettivamente), se ne deduce che anche l'angolo MBN deve essere retto, e il triangolo ABC è rettangolo in B .

Perciò (rifare il disegno) O risulta essere il punto medio del lato AC e OM e ON sono paralleli a BC e AB rispettivamente. Pertanto argomenti di similitudine tra triangoli mostrano che $BC = 2a$ e $AB = 2b$. Giacché il triangolo è rettangolo possiamo calcolare AC col teorema di pitagora e infine il raggio della circonferenza inscritta con la formula

$$r = \mathcal{S}/p \quad (4)$$

dove $\mathcal{S}$ è l'area e $2p$ è il perimetro di ABC . $\square$

3. Sul piano ci sono 2006 punti allineati distinti a distanza 1 l'uno dal successivo. Sia P un generico punto del piano. Quanto vale al minimo la somma delle distanze tra P e i 2006 punti. In che posizione va messo P perché tale somma sia minima?

Dimostrazione. Siano A e B due punti a distanza d e sia P un punto qualsiasi. Vogliamo minimizzare la somma $PA + PB$. Sia P' la proiezione di P sulla retta AB . Per il teorema di Pitagora le distanze PA e PB sono rispettivamente più grandi (ipotenuse) delle distanze $P'A$ e $P'B$ (cateti); quindi il minimo va cercato per punti P che si trovano sulla retta AB . Allora supponiamo P sia sulla retta AB . Se P è sul segmento AB la $PA + PB$ vale esattamente d , mentre se si trova all'esterno almeno una grandezza tra PA e PB è maggiore di d e a maggior ragione la loro somma. Perciò il minimo di $PA + PB$ è d e si ottiene tale valore per punti P sul segmento AB .

Torniamo al problema iniziale; siano $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2006}$ i 2006 punti allineati (presi in ordine, cioè in modo che Q_i disti 1 da Q_{i+1}). Vogliamo minimizzare la somma $\sum_{i=1}^{2006} PQ_i$. Riscriviamo tale somma come segue

$$\sum_{i=1}^{2006} PQ_i = \sum_{i=1}^{1003} (PQ_i + PQ_{2007-i}) \quad (5)$$

Ora la distanza $Q_i Q_{2007-i}$ misura $2007 - 2 \cdot i$, quindi per quanto detto finora $PQ_i + PQ_{2007-i}$ misura al minimo $2007 - 2 \cdot i$ e tale minimo è realizzato quando P si trova nel segmento $Q_i Q_{2007-i}$. Perciò possiamo minimizzare la somma (5) minimizzando contemporaneamente ogni suo

addendo, ovvero ponendo il punto P all'interno di ognuno dei segmenti $Q_i Q_{2007-i}$ per $i = 1 \dots 1003$ (cioè mettendo P nell'intersezione di tali segmenti, che è non vuota e anzi coincide col segmento $Q_{1003} Q_{1004}$ che è incluso in tutti gli altri); tale somma allora varrà $\sum_{i=1}^{1003} (2007 - 2 \cdot i)$. Cambiando indici ($j = 1003 - i$) si vede che tale somma non è altro che la somma dei primi 1003 numeri dispari. Tale somma vale pertanto 1003^2 (si dimostra, ad esempio per induzione, che la somma dei primi n numeri dispari vale n^2). $\square$

4. Sia ABC un triangolo acutangolo e si costruiscano sui tre lati tre triangoli equilateri puntanti verso l'esterno del triangolo (come i quadrati costruiti sui lati del triangolo rettangolo). Siano tali triangoli ABC' , BCA' e CAB' .
- mostrare che i segmenti AA' , BB' e CC' si incontrano in un unico punto O .
 - Sia P un punto del piano. Mostrare che la somma delle distanze $PA + PB + PC$ è minima quando P coincide con O .

Dimostrazione. Le rette BB' e CC' si incontrano in O . Facciamo vedere che i punti A , O e A' sono allineati.

I triangoli $CC'A$ e $B'BA$ sono congruenti, dal momento che hanno un angolo uguale (in entrambi i triangoli l'angolo in A misura $60^\circ + \widehat{BAC}$) e i lati adiacenti uguali ($AC' = AB$ e $AC = AB'$); quindi gli angoli $AB'B$ e ACC' sono uguali e il quadrilatero $AOCB'$ è ciclico (questi angoli uguali insistono sullo stesso lato AO). Se ne deduce che anche gli angoli $COB' = CAB' = 60^\circ$ e $AOB' = ACB' = 60^\circ$. Se mostriamo che anche l'angolo COA' misura 60° otterremo che l'angolo $AOA' = AOB' + B'OC + COA' = 180^\circ$ che è quanto vogliamo dimostrare. Ora l'angolo COB misura 120° che è il complementare di $CA'B = 60^\circ$, perciò il quadrilatero $COBA'$ è ciclico e gli angoli COA' e CBA' sono uguali e misurano entrambi 60° .

Il punto O del punto precedente viene chiamato Punto di Fermat del triangolo ABC . Mostriamo allora che tale punto minimizza la quantità $PA + PB + PC$. La prima osservazione utile a questo scopo è che se vogliamo minimizzare tale somma conviene prendere il punto P all'interno del triangolo ABC . Infatti supponiamo che il punto P sia un punto di minimo per la somma $PA + PB + PC$ e supponiamo, per esempio, che il punto P si trovi, rispetto alla retta BC dall'altra parte rispetto ad A (cioè nel semipiano che non contiene A). Allora il punto Q simmetrico di P rispetto la retta BC è tale che $QA + QB + QC < PA + PB + PC$ perché $QB = PB$, $PC = PB$ e invece $QA < PA$. E questo è assurdo contro l'ipotesi che P era un punto di minimo.

Supponiamo dunque che P sia nel triangolo ABC , e senza perdita di generalità possiamo supporre che sia, per esempio, nel triangolo AOC , e dalla stessa parte di A rispetto la retta BB' . Costruiamo sul segmento AP un triangolo equilatero APQ in modo che Q sia, rispetto la retta AP , dalla stessa parte di B' . I triangoli AQB' e APC sono uguali dal momento che hanno l'angolo in A coincidente e i lati adiacenti uguali. Pertanto $PC = QB'$. Per costruzione abbiamo anche $AP = PQ$; quindi la somma $PA + PB + PC = B'Q + PQ + BP$ che è anche la lunghezza della spezzata

$BPQB'$ che unisce B e B' . Ora tale lunghezza é maggiore di BB' che é il percorso minimo che unisce B e B' , perciò la lunghezza della spezzata (e quindi $PA + PB + PC$) é minima quando tale spezzata coincide col segmento BB' , ovvero quando sia P che Q stanno sul segmento BB' . Ora grazie al punto precedente che ci dice quanto misura l'angolo APB' concludere per esercizio che P e Q sono entrambi sul segmento BB' solo quando P coincide con O . $\square$

5. Sia $ABCD$ un quadrilatero. Si sa che gli angoli $ABD = 30^\circ$, $DBC = 50^\circ$, $BCA = 60^\circ$ e $ACD = 20^\circ$. Calcolare CAD .

Dimostrazione. Sia A' il punto sulla retta CD simmetrico ad A rispetto all'asse di BC . i segmenti BA' e AC si intersecano in E e BEC e AEA' sono entrambi equilateri. Usando che la somma degli angoli in un triangolo é 180° si deduce che $BDC = 50^\circ$ e quindi il triangolo DCB é isoscele e i lati BC e CD sono uguali ma abbiamo anche $BC = EC$ e anche il triangolo ECD é isoscele in C . Pertanto possiamo calcolare l'angolo $CDE = DEC = 80^\circ$. Quindi otteniamo $DEA = 100^\circ$, da cui segue $DEA' = 40^\circ$. Ora ragionando sul triangolo ABC si ottiene che l'angolo $BAC = 40^\circ$, ma tale angolo coincide con $BA'C$ e quindi il triangolo $A'ED$ é isoscele in D e $ED = A'D$. Allo stesso tempo abbiamo $EA = AA'$ e quindi i due triangoli AED e $AA'D$ sono uguali in quanto hanno lati corrispondenti uguali. Questo mostra che l'angolo EAD é la metà di $A'AE$ che misura 60° (ragionando sul fatto che $BAA' = 100^\circ$ dal momento che BC e AA' sono parallele). Quindi $EAD = 30^\circ$. $\square$