1 Invarianti: parità, colorazioni, giochi

Esercizi proposti

1. Sulla lavagna sono scritti i numeri positivi 1, 2, ... , $4n - 1$. Ad ogni mossa si possono sostituire due di essi con il modulo della loro differenza (ad esempio, si può sostituire 3 e 5 con 2). Dimostrare che dopo $4n-2$ mosse rimarrà sulla lavagna un numero pari.

2. Data una scacchiera classica si possono ridipingere tutte le caselle

   (a) di una riga o una colonna

   (b) di un quadrato 2x2.

   Dimostrare che non è possibile raggiungere una configurazione in cui uno e un solo un quadratino è nero.

3. Una scacchiera 4x4 contiene la cifra 1 in tutte le caselle, ad eccezione di una delle due centrali dell'ultima riga, in cui si trova -1. Ogni mossa consente di cambiare tutti i segni di una riga, una colonna o una diagonale. Dimostrare che, indipendentemente dal numero e dal tipo di mosse effettuate, rimarrà almeno un -1 nella tabella.

4. * Ciascuno dei numeri da 1 a 10^6 è ripetutamente rimpiazzato dalla somma delle sue cifre, fino ad ottenere 10^6 numeri di una cifra sola (ad esempio, $9784 \to 28 \to 10 \to 1$). Alla fine ci saranno più 1 o 2?

5. ** Ciascuno dei numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ è 1 o -1 e si ha:

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$$

   Dimostrare che n è un multiplo di 4.

6. Intorno ad un cerchio si trovano cinque cifre 1 e quattro 0. Per ogni coppia di numeri consecutivi, si scrive tra di essi uno zero se questi sono uguali, altrimenti si scrive un uno. Poi le cifre originali vengono cancellate. Dimostrare che, se si ripete il procedimento più volte, non si otterranno mai nove cifre 0.

7. Un pavimento rettangolare è stato coperto con piastrelle quadrate 2x2 e piastrelle rettangolari 1x4 in un certo modo. Ad un certo punto una delle piastrelle si rompe. Dimostrare che non è possibile sostituirla con una dell'altro tipo, neanche riorganizzando a piacere la pavimentazione.

8. (a) Un quadrato 7x7 è coperto da 16 piastrelle 3x1 e da una 1x1. Quali sono le posizioni possibili di quest'ultima (quella 1x1)?
   (b) Un quadrato 8x8 è coperto da 21 piastrelle 3x1 e da una 1x1. Quali sono le posizioni possibili di quest'ultima (quella 1x1)?

9. ** Ciascuna casella di un quadrato 25x25 contiene 1 o -1. Sia a_i il prodotto dei numeri sulla i-esima riga e b_j il prodotto di quelli sulla j-esima colonna. Dimostrare che:

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \ldots + a_{25} + b_{25} \neq 0$$

10. Tutti i punti del piano sono colorati o di bianco o di nero. Dimostrare che esiste un triangolo equilatero che ha tutti i vertici dello stesso colore.

11. * Si considerino i tre punti sul piano cartesiano $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$. E' possibile raggiungere il quarto punto $D(1,1)$, per mezzo di riflessioni successive rispetto ad A, B, C o agli ulteriori punti in tal modo ottenuti?

    Esempio [1]. Il punto $K(4,4)$ può essere ottenuto con le seguenti *mosse*:

    - $M(2,-1) > [B; C]$,
    - $N(2,0) > [A; C]$,
    - $P(2,1) > [M; N]$,
    - $Q(2,2) > [N; P]$,
    - $K(4,4) > [A; Q]$.

12. *** Ogni numero naturale, zero incluso, è colorato di bianco o di rosso, in modo che:

    - vi siano almeno un numero bianco ed almeno un numero rosso;
    - la somma tra un numero bianco ed un numero rosso sia bianca;
    - il prodotto tra un numero bianco ed un numero rosso sia rosso.

    Dimostrare che il prodotto di due numeri rossi è sempre un numero rosso e che la somma di due numeri rossi è sempre un numero rosso.

[1] con $X > [Y; Z]$ indichiamo che il punto X può essere ottenuto a partire dal punto Y in seguito ad una riflessione rispetto al punto Z