1. Tre uomini d'affari vivono in Toscana e si chiamano Bianchi, Rossi e Verdi. Anche tre ferrovieri che si chiamano Bianchi, Rossi, Verdi vivono in Toscana. L'uomo d'affari che si chiama Rossi e il controllore vivono a Livorno, l'uomo d'affari Verdi e il macchinista vivono a Lucca, mentre l'uomo d'affari Bianchi e il capotreno vivono a Pisa. L'uomo d'affari che ha lo stesso cognome del controllore guadagna 350 milioni l'anno, mentre il capotreno guadagna esattamente un terzo dei milioni di quanto guadagna l'uomo d'affari che vive più vicino a lui. Infine il ferroviere Bianchi ha battuto il macchinista a tennis. Come si chiama il capotreno?

*Soluzione* : Se il controllore si chiamasse Bianchi, allora il guadagno dell'uomo d'affari chiamato Bianchi sarebbe di 350 milioni. Il ferroviere che vive più vicino a Bianchi è il capotreno, e sappiamo che dovrebbe guadagnare un terzo del suo stipendio. Ma 350 non è divisibile per 3 dunque il controllore non può chiamarsi Bianchi. Anche il macchinista non può chiamarsi Bianchi, in quanto i due hanno giocato contro a tennis. Da questo segue che il capotreno deve chiamarsi Bianchi.

2. 5 ragazzi A, B, C, D, E portano un cappellino di colore bianco o di colore rosso e ciascuno di loro non sa di che colore è il suo cappellino. Si sa che chi porta il cappellino rosso dice sempre la verità, mentre chi porta il cappellino bianco mente sempre.
A dice: Io vedo tre cappellini rossi e uno bianco.
B dice: Io vedo quattro cappellini bianchi.
C dice: Io vedo un cappellino rosso e tre bianchi.
D dice: Io vedo quattro cappellini rossi.
Determinare il colore del cappellino di ogni ragazzo.

*Soluzione* : Supponiamo che D sia vero, allora vedrebbe A, B, C, ed E tutti rossi. Però a sua volta A dovrebbe vedere quattro rossi e dunque mentirebbe. Quindi A avrebbe un cappello bianco, in contraddizione con l'ipotesi fatta su D. Quindi D mente ed ha un cappello bianco. Stesso procedimento per B, supponiamo che B dica il vero, allora avrebbero il cappello bianco A, C, D, E, ma a questo punto C vedrebbe tre bianchi ed un rosso e dunque starebbe dicendo il vero: contraddizione. Quindi anche B ha il cappello bianco. Allora A dice il falso in quanto sia B che D hanno il cappello bianco, dunque anche A indossa il cappello bianco. Rimane da analizzare C. Se C dicesse il falso allora E dovrebbe indossare un cappello bianco (E era l'unico grado di libertà rimasto) e dunque B direbbe il vero: ma abbiamo già scartato questa eventualità. Quindi C indossa un cappello rosso e dato che dice il vero, e quindi E ha un cappello rosso.

3. Fissato un intero $n > 1$, Alberto e Barbara giocano al seguente gioco:

(a) Alberto sceglie un intero positivo;

(b) Barbara sceglie un intero maggiore di 1 che sia multiplo o sotto multiplo del numero di Alberto.
(c) Alberto restituisce a Barbara il numero da lei detto, eventualmente aggiungendo 1 o togliendo 1.

Il gioco prosegue ripetendo alternativamente i passi b) e c). Barbara vince se riesce a scegliere n entro 50 mosse. Per quali valori di n Barbara può vincere contro qualunque scelta di Alberto?

*Soluzione*: In linea di principio ci sarebbero 2 modi con cui barbara può vincere: consegnare ad Alberto un numero maggiore di $n$ facendo sì che egli sia costretto a restituirle un multiplo di $n$ oppure consegnare ad Alberto un numero minore di $n$ costringendolo a restituirle un sottomultiplo di $n$. Nella realtà la prima ipotesi non potrà essere seguita: se Alberto riceve un numero non-multiplo di $n$ si limita a restituirlo a Barbara invariato, mentre se riceve un multiplo di $n$ ci somma 1, rendendolo non-multiplo. Barbara perciò può solo tentare la seconda strada e possiamo mostrare che, in poche mosse, ella può vincere se $n$ è un multiplo di 6. Vediamo come: se Alberto sceglie un numero pari, Barbara sceglie 2, a questo punto Alberto può restituirle 1, 2 oppure 3, perdendo in ogni caso. Se Alberto sceglie un numero dispari, Barbara lo moltiplica per 3 e restituisce ad Alberto un numero dispari multiplo di 3; Alberto può lasciarlo invariato o cambiarlo rendendolo pari: se fa quest'ultima scelta perde, come descritto prima, mentre se lascia il numero invariato, Barbara sceglie 3. A questo punto Alberto può restituirle 2, 3 o 4, perdendo subito nei primi 2 casi oppure permettendo a Barbara di scegliere 2, nel caso le restituisca il 4; perciò anche in questo caso Alberto perde.
Se il numero non è multiplo di 6 Alberto invece può sempre vincere in quanto in questo caso $n$ non sarà divisibile per 2 oppure non sarà divisibile per 3 (o entrambe le cose): nel primo caso sarà sufficiente che Alberto dia a Barbara sempre un numero pari (stiamo sempre parlando di numeri minori di $n$ per quanto detto sopra) che non potrà essere sottomultiplo di $n$ perché questo è dispari, nel secondo caso egli restituirà un multiplo di 3, che non potrà essere sottomultiplo di $n$ perché esso non è divisibile per 3. Con le mosse a sua disposizione Alberto può sempre dare a Barbara un numero pari o un numero divisibile per 3, a seconda dei casi, non uscendo dunque mai sconfitto.

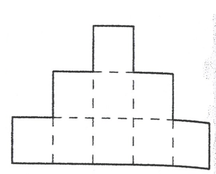
4. Alberto e Barbara fanno il seguente gioco. Su di un tavolo ci sono 1999 cerini: a turno ogni giocatore deve togliere dal tavolo un numero di cerini a sua scelta, purché maggiore o uguale a 1, e minore o uguale alla metà del numero dei cerini che in quel momento sono sul tavolo. Il giocatore che lascia sul tavolo un solo cerino perde. Barbara è la prima a giocare. Deter- minare per quale dei 2 giocatori esiste una strategia vincente e descrivere tale strategia.

*Soluzione*: Per vincere bisogna lasciare all'avversario 2 cerini, cosicché egli sia costretto a lasciarne 1. Per lasciare all'avversario 2 cerini è necessario che egli ce ne lasci 3 o 4; per essere certi che egli ne lasci 3 o 4 si deve far sì che sul tavolo ne restino 5. Generalizzando l'idea volendo lasciare all'avversario $n$ cerini, si deve lasciarne al turno precedente $2n + 1$, infatti egli potrà toglierne da 1 a $n$, lasciandone un numero compreso tra $n + 1$ e $2n$ il ché permette di lasciare $n$ cerini al passo successivo. Dato che l'obiettivo è lasciare 2 cerini, possiamo ricavare la successione del numero di cerini che di volta in volta vanno lasciati all'avversario, essa sarà una progressione mista del tipo

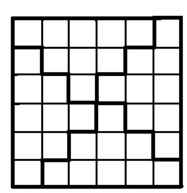
$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$$

la successione ha i seguenti valori (fino all'ultimo minore di 1999): 2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535. Perciò se Barbara alla prima mossa lascia sul tavolo 1535 cerini, potrà chiudere la partita con una vittoria, lasciando di volta in volta un numero di cerini pari ai valori della successione.

5. Determinare per quali valori dell'intero n è possibile ricoprire, senza sovrapposizioni senza lasciare caselle vuote e senza fare sporgere tasselli, un quadrato di lato n con tasselli del tipo mostrato in figura, dove ogni quadratino del tassello ha lato unitario.



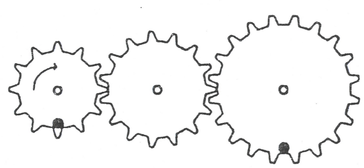
*Soluzione*: Innanzitutto è necessario che $n$ sia multiplo di 3, in quanto $n^2$ deve essere multiplo di 9, dovendo contenere un numero intero di piastrelle, ognuna delle quali ha 9 caselle; è facile notare che è possibile tassellare un quadrato di lato 6, ne seguente modo



e dunque un qualsiasi quadrato con un lato multiplo di 6 sarà tassellabile usando le piastrelle $6 \times 6$ formate in precedenza.

Resta da analizzare il caso con $n$ multiplo di 3 dispari, per questo mostreremo che non è possibile una tassellazione: in questo caso il numero di caselle, $n^2$, è un numero dispari; colorando il quadrato come una scacchiera classica il numero di caselle nere e il numero di bianche differiscono di 1 unità. Dato che $n$ è dispari avremo che il numero di piastrelle necessarie $\frac{n^2}{9}$ sarà anch'esso dispari. Con la colorazione effettuata una piastrella di quella forma copre 6 caselle nere e 3 bianche o viceversa; dato che le piastrelle sono dispari ce ne saranno più di un tipo rispetto all'altro (più con 6 nere ad esempio), cosicché il numero di caselle nere dovrebbe essere almeno 3 in più rispetto a quelle bianche, ma ciò è impossibile.

6. Tre ingranaggi sono collegati tra loro come nella figura sotto, essi hanno rispettivamente 12, 15 e 20 denti. Il primo e il terzo ingranaggio portano marcati dei punti che all'inizio si trovano entrambi nella posizione più bassa possibile. All'ingranaggio di 12 denti è connesso un motore. Dopo quanti giri del motore si riproduce per la prima volta la stessa situazione, cioè con i punti marcati nella posizione più bassa?



*Soluzione* : Il primo ingranaggio torna nella posizione iniziale dopo 12 scatti, mentre il terzo dopo 20. Il minimo comune multiplo tra 12 e 20 è 60, quindi i due ingranaggi saranno nella posizione iniziale dopo 60 scatti; dato che il primo ingranaggio compie dodici scatti ogni giro del motore, si avrà la posizione iniziale dopo 5 giri.